

Chapitre I : Echantillonnage et Reconstitution

I. Principe de la commande numérique

La commande numérique par ordinateur (micro-ordinateur, microprocesseurs, API..) s'effectue nécessairement à temps discret. En règle générale, une période d'échantillonnage « T_e » conditionne le rythme d'acquisition des mesures et de la génération des signaux de commande par ordinateur. Les processus considérés dans la commande numérique étant généralement de nature continu.

On distingue deux configurations possibles pour introduire un ordinateur numérique dans une boucle de régulation :

1^{ère} Configuration de la commande numérique :

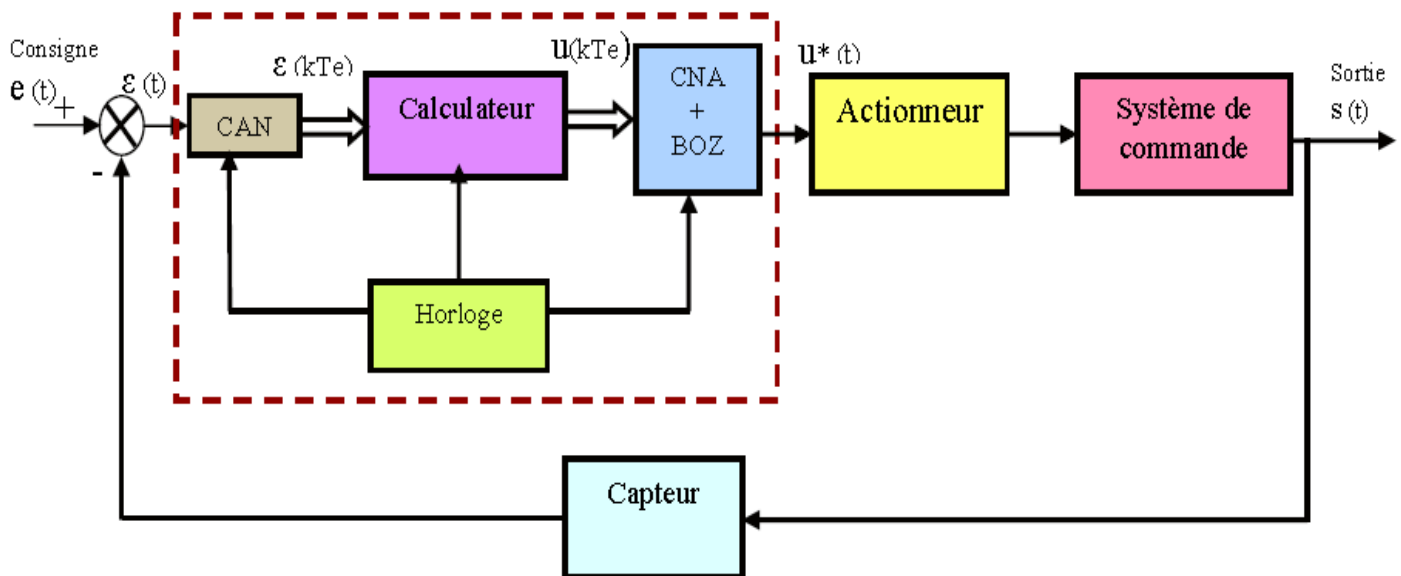


Figure 1. Réalisation numérique d'un régulateur de type « analogique »

Définitions et notions de base :

- Le Convertisseur Analogique – Numérique (C.A.N) : est un dispositif qui convertit un signal analogique (l'erreur $\varepsilon(t)$ entre l'entrée (consigne $e(t)$) et la mesure de la

ISO9001- 2015

Autorisation N° : 06-2001

sortie $s(t)$ en une suite d'échantillon de valeurs numérique toutes les « T_e » secondes (T_e est la période d'échantillonnage définie par l'horloge de synchronisation).

- ☐ Le calculateur numérique lit la valeur numérique de l'erreur, la met en mémoire et à partir d'un algorithme implanté dans la mémoire de ce dernier sous forme d'une récurrence, produit un signal numérique de commande $u(kT_e)$.
- ☐ Ce signal de commande est ensuite converti en un signal analogique $u^*(t)$ qui est maintenu constant entre les instants d'échantillonnage par un bloqueur d'ordre zéro (B.O.Z).
- ☐ Le signal $u^*(t)$ est généralement amplifié par un amplificateur de puissance et appliqué au système physique à commander.
- ☐ L'ensemble {C.A.N -calculateur - C.N.A} est sensé se comporter comme un régulateur analogique (par exemple un régulateur de type PID).
- ☐ Les deux opérations de conversions (A/N) et (N/A) sont synchronisées au moyen d'une horloge qui cadence ces opérations.

2^{ème} Configuration de la commande numérique :

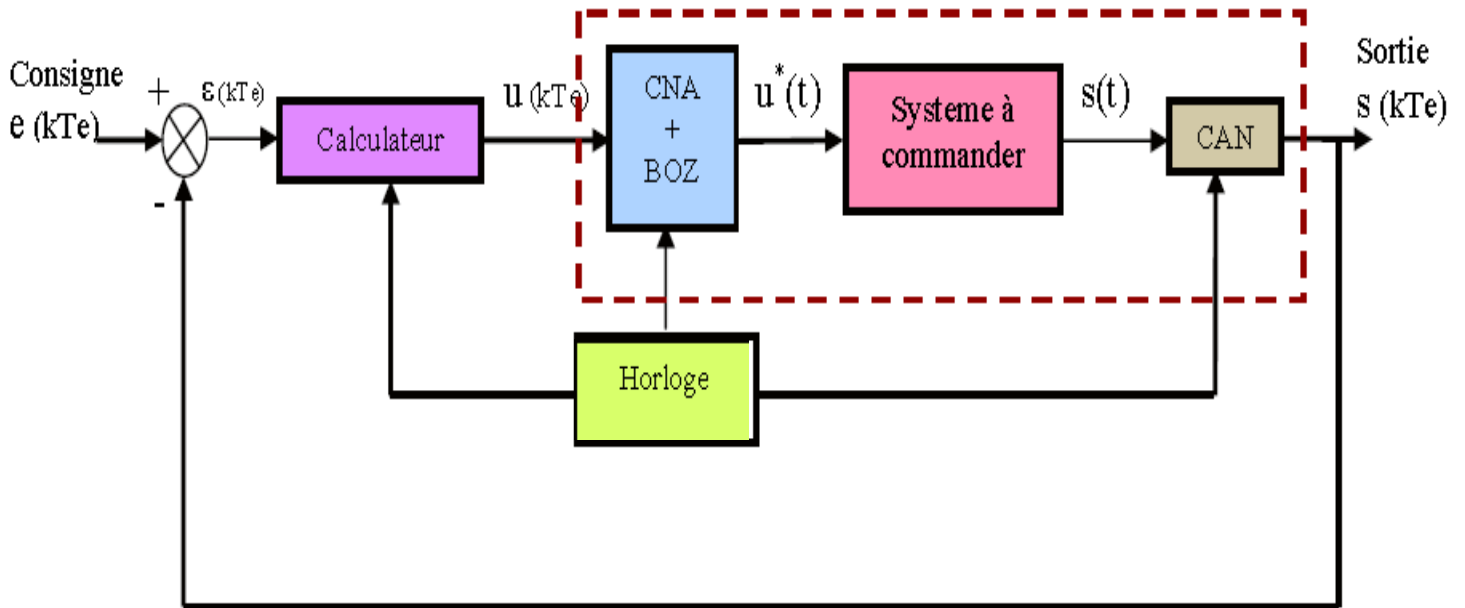


Figure 2. Système de régulateur numérique

Dans cette configuration, l'ensemble {C.N.A –système à commander– C.A.N} est interprété comme un processus discrétisé, dont l'entrée de commande est la séquence $u(kTe)$ engendrée par le calculateur, la sortie étant la séquence $s(kTe)$ résultant de la conversion (A/N) de la sortie $s(t)$.

Ce processus discrétisé est caractérisé par un modèle dynamique échantillonné qui décrit la relation entre les séquences $u(kTe)$ et $s(kTe)$.

II. Signaux échantillonnés

II.1. Signaux discrets

Les signaux à temps discrets correspondent souvent à l'observation à des instants d'échantillonnage « t_k » des signaux continus. On parle alors de signaux échantillonnés, lorsque la durée entre deux instants d'échantillonnage est invariante :

$$t_{k+1} - t_k = Te$$

Avec :

T_e : Période d'échantillonnage.

L'échantillonnage est dit à période constante « T_e ».

Dans le cas où le signal $x(t)$ n'est défini qu'à des instants discrets $t_k = kT_e$, on adopte alors les notations suivantes:

$$x(t_k) = x(kT_e) = x_k \quad k \in \mathbb{Z}$$

II.2. Echantillonnage d'un signal continu

II.2.1. Définition

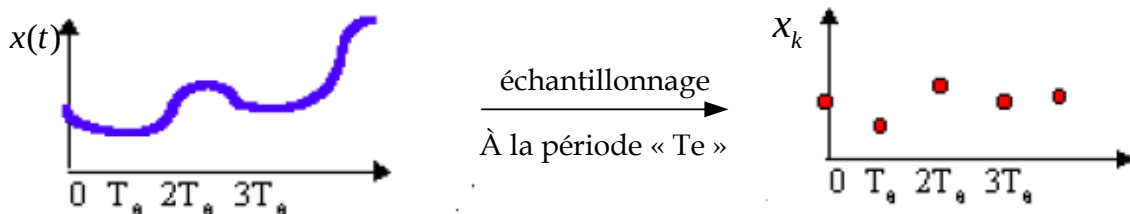
L'opération d'échantillonnage est la transformation d'un signal continu $x(t)$ en une série numérique dont les termes correspondent aux valeurs prises par $x(t)$ aux instants d'échantillonnage distants de « T_e ».

$$x(kT_e) = x(t) \Big|_{t=kT_e}$$

$$x(t) \xrightarrow{\text{échantillonnage}} x^*(t) = \{x(0), x(T_e), x(2T_e), x(3T_e), \dots, x(kT_e)\}$$

$0, T_e, 2T_e, \dots, kT_e, \dots$: Représentent les instants d'échantillonnage

T_e : Période d'échantillonnage



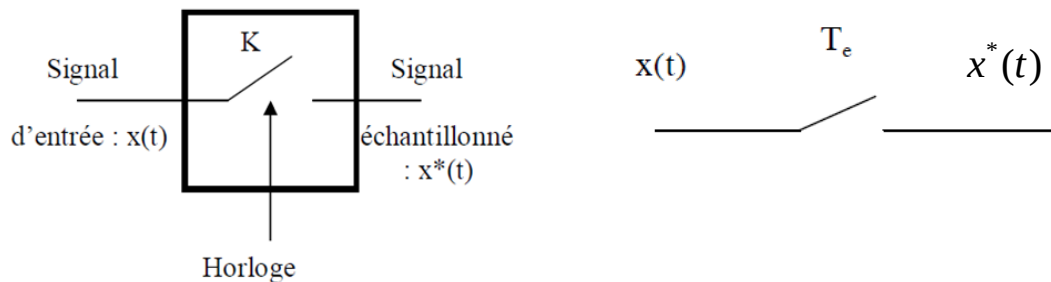
De point de vue mathématique, l'échantillonneur réalise la multiplication du signal original par la fonction peigne de Dirac, paramétrée par T_e :

$$x^*(t) = x(t) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT_e) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_e) \cdot \delta(t - kT_e)$$

Avec $\delta_{T_e}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT_e)$: appelée peigne de Dirac.

II.2.2. Symbole d'un échantillonneur

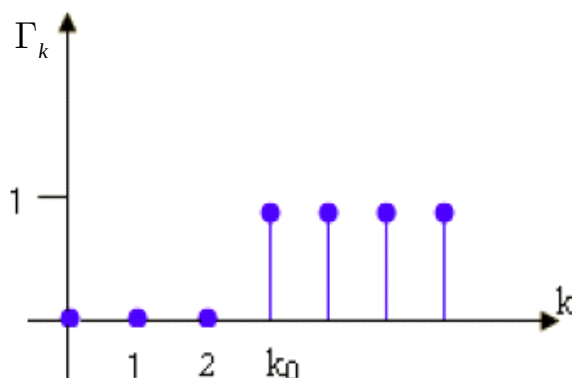
D'un point de vue symbolique, l'opérateur d'échantillonnage peut être représenté par un interrupteur électronique qui se ferme périodiquement avec une période T_e .



II.2.3. Exemples des signaux discrets fondamentaux

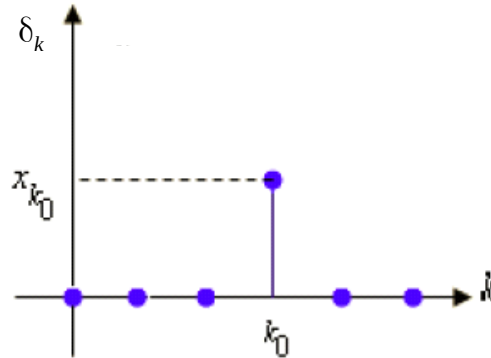
a. Echelon unité à k_0 :

$$\Gamma_{k-k_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } k < k_0 \\ 1 & \text{si } k \geq k_0 \end{cases}$$



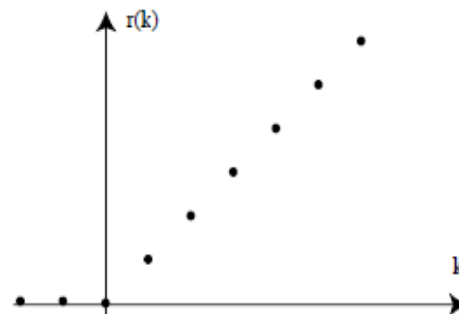
b. Signal impulsionnel discret à k_0 :

$$\delta_{k-k_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq k_0 \\ 1 & \text{si } k = k_0 \end{cases}$$



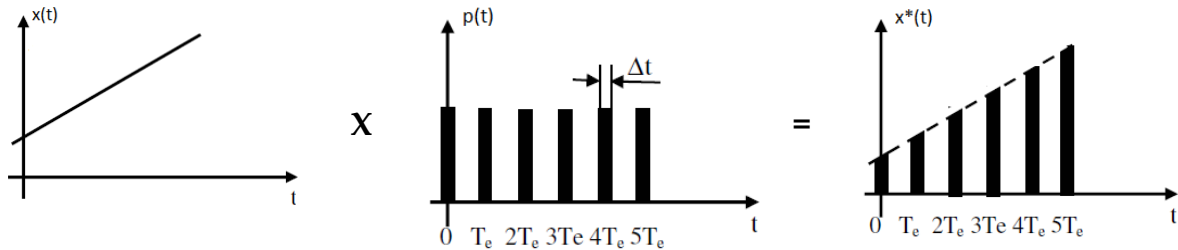
c. Signal rampe unitaire :

$$r(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0 \\ kTe & \text{si } k > 0 \end{cases}$$



II.2.4. Echantillonnage réel

Le prélèvement de l'information ne peut pas être ponctuel, la valeur du signal $x(t)$ est prise pendant une durée (Δt) très petite :



II.3. Choix de la fréquence d'échantillonnage

II.3.1. Exemple de discrétisation d'une sinusoïde

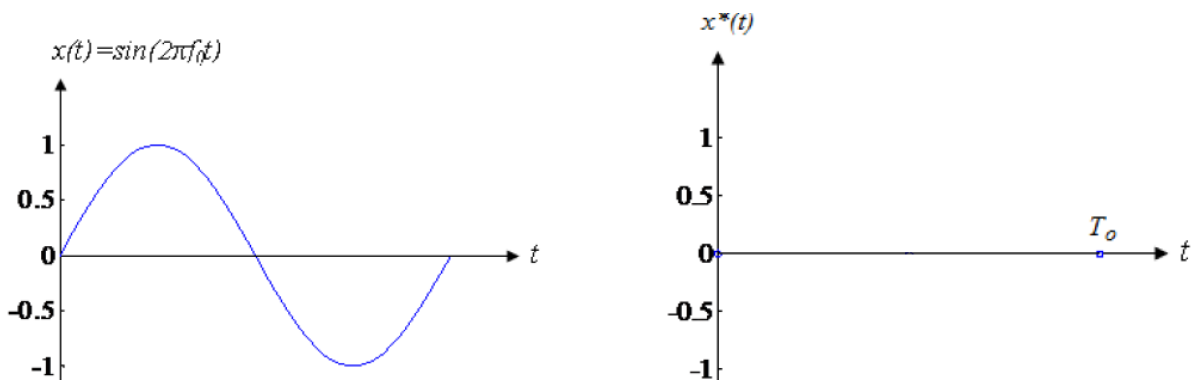
On considère une sinusoïde de fréquence f_0 : $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ avec $t \geq 0$

On propose maintenant de représenter la discrétisation de cette sinusoïde pour différentes fréquences d'échantillonnage. $f_e = \frac{1}{T_e}$

Avec f_e : fréquence d'échantillonnage.

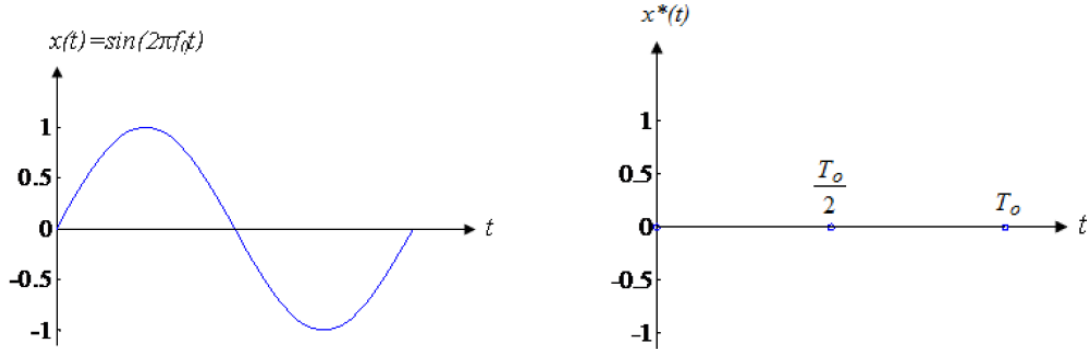
1^{er} cas: $f_e = f_0 \Leftrightarrow T_e = \frac{1}{f_0} = T_0$

$$T_e = T_0$$



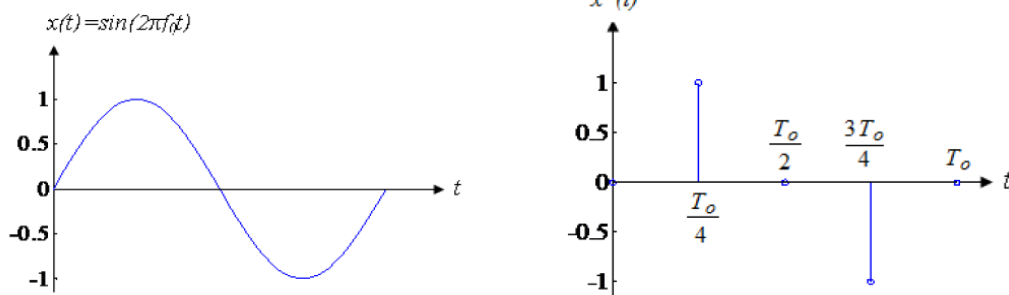
2^{ème} cas: $f_e = 2 f_0 \Leftrightarrow T_e = \frac{1}{2 f_0} = \frac{T_0}{2}$

$$Te = \frac{T_0}{2}$$



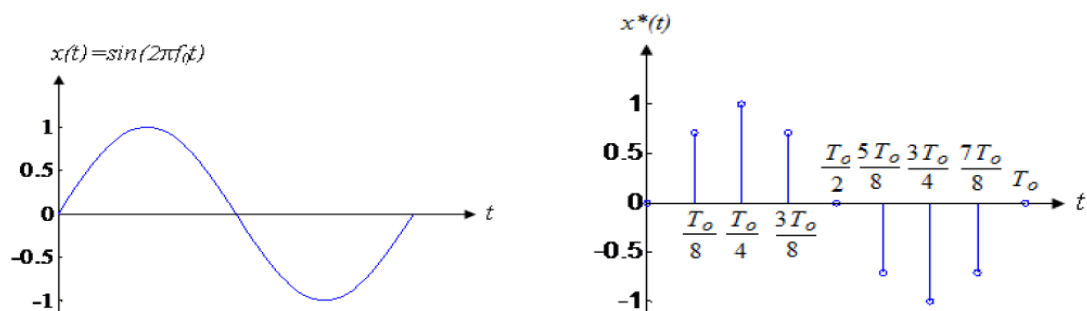
3^{ème} cas: $f_e = 4f_0 \Leftrightarrow Te = \frac{1}{4f_0} = \frac{T_0}{4}$

$$Te = \frac{T_0}{4}$$



4^{ème} cas: $f_e = 8f_0 \Leftrightarrow Te = \frac{1}{8f_0} = \frac{T_0}{8}$

$$Te = \frac{T_0}{8}$$



Remarque :

- En échantillonnant, à la fréquence $f_e = f_0$. On perd toute l'information dans le signal initial.
- Lorsqu'on réduit la période d'échantillonnage, c'est-à-dire lorsqu'on augmente f_e ➡ On a plus d'information sur le signal $x(t)$.

II.3.2. Théorème de Shannon

On ne perd aucune information en échantillonnant un signal analogique $x(t)$ à une fréquence $f_e > 2 f_{\max}$.

Avec : $f_{\max}$ est la plus grande fréquence contenu dans le signal $x(t)$.

Remarque :

$f_N = \frac{f_e}{2}$: est la fréquence de Nyquist.

Donc, la condition de Shannon : $f_{\max} < \frac{f_e}{2} = f_N$

III. Introduction à la notion de spectre d'un signal

Le spectre (est plus précisément le spectre d'amplitude) d'un signal représente l'amplitude de différentes fréquences contenues dans le signal. On note $X(f)$ le spectre du signal $x(t)$.

Exemple 1:

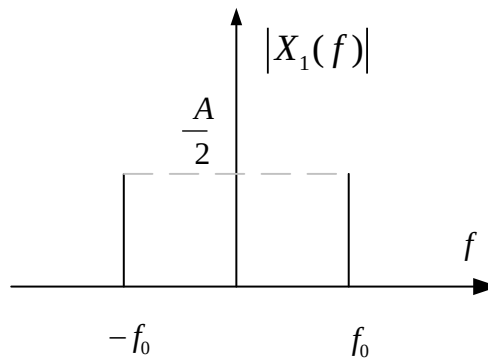
$$x_1(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$$

On rappelle que la fonction sinus est écrite sous sa forme exponentielle :

$$\sin(j\omega t) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A \sin(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \\ &= \frac{A}{2j}(e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}) \end{aligned}$$

Donc, on obtient deux fréquences : f_0 et $-f_0$ avec une amplitude $\left| \frac{A}{2j} \right| = \frac{A}{2}$



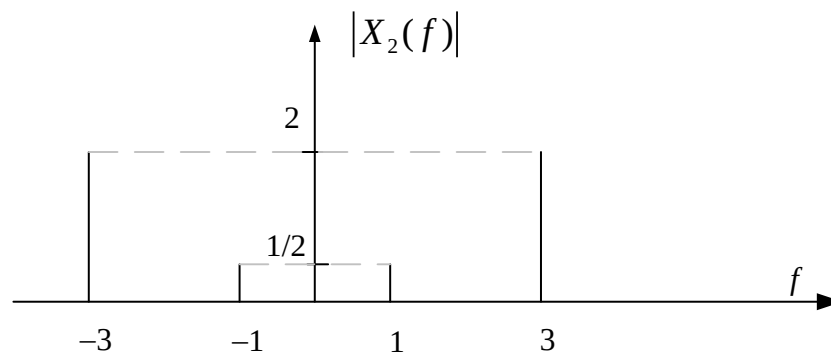
Exemple 2:

$$x_2(t) = \cos(2\pi t) - 4\sin(6\pi t)$$

On rappelle que la fonction cosinus est écrite sous sa forme exponentielle :

$$\cos(j\omega t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \cos(2\pi t) - 4\sin(6\pi t) \\ &= \frac{1}{2}(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) - \frac{4}{2j}(e^{j6\pi t} - e^{-j6\pi t}) \\ &= \frac{1}{2}e^{j2\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi t} - \frac{2}{j}e^{j6\pi t} + \frac{2}{j}e^{-j6\pi t} \end{aligned}$$

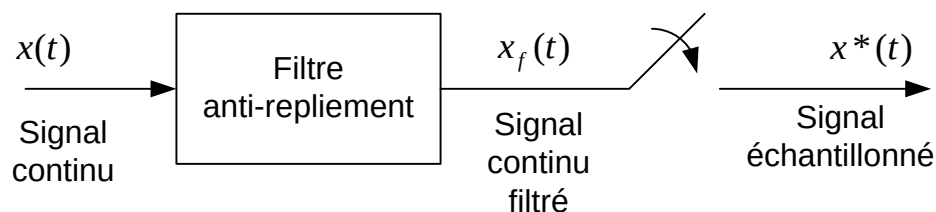


Remarque :

Un signal réel $x(t)$ a un spectre symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

IV. Le Filtre Anti-Repliement (FAR)

Le signal $x(t)$ peut être bruité par des perturbations des fréquences élevées. Ainsi, pour remplir les conditions de Shannon, il faut impérativement filtrer (supprimer ces bruits avant l'opération d'échantillonnage). On utilise un filtre passe-bas appelé filtre anti-repliement ou anti-recouvrement.



V. Reconstitution d'un signal

C'est l'opération inverse de l'échantillonnage : C'est le passage de $x(kT_e)$ à un signal analogique $x_b(t)$ qui soit proche de $x(t)$. Cette opération n'est possible que si le théorème de Shannon est vérifié.

V.1. Bloqueur d'Ordre Zéro (B.O.Z.)

En anglais, Zero Order Hold (Z.O.H).

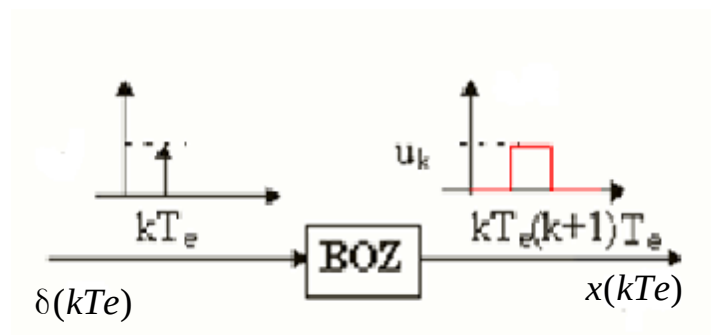
Le B.O.Z. maintient le signal constant sur une période d'échantillonnage.

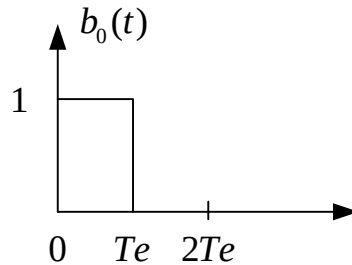
- A l'instant $t_0 = 0T_e$: on dispose que de la valeur $x(0)$
- Entre 0 et $T_e \rightarrow x_b(t) = x(0)$.
- A l'instant $t_1 = T_e$: on a les valeurs $x(0)$ et $x(T_e)$
- Entre T_e et $2T_e \rightarrow x_b(t) = x(0)$.

D'une façon générale :

$$t \in [kT_e, (k+1)T_e] \rightarrow x_b(t) = x(kT_e)$$

La réponse impulsionnelle du B.O.Z. est donnée par :



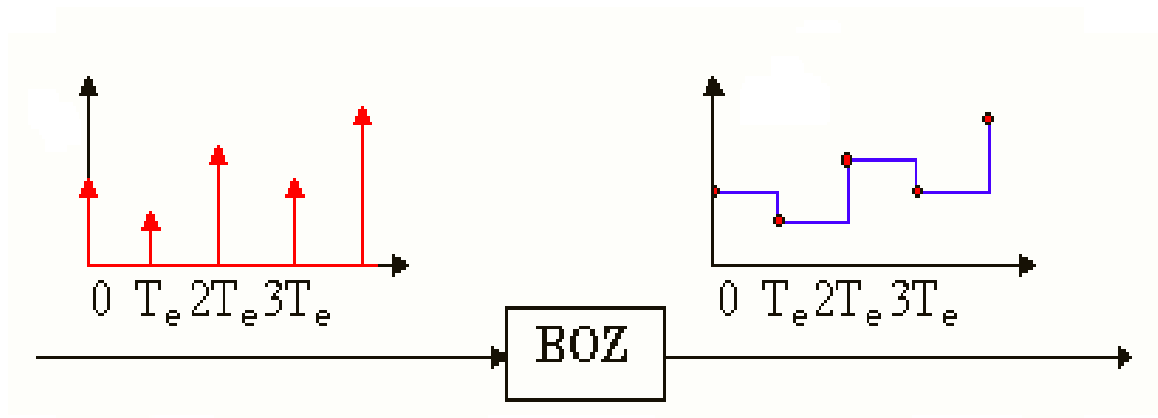


$$b_0(t) = \Gamma(t) - \Gamma(t - T_e)$$

Ainsi, la fonction de transfert associée au bloqueur d'ordre zéro est donnée par :

$$B_0(p) = \frac{1 - e^{-pT_e}}{p}$$

Exemple d'une entrée quelconque d'un Bloqueur d'Ordre Zéro :



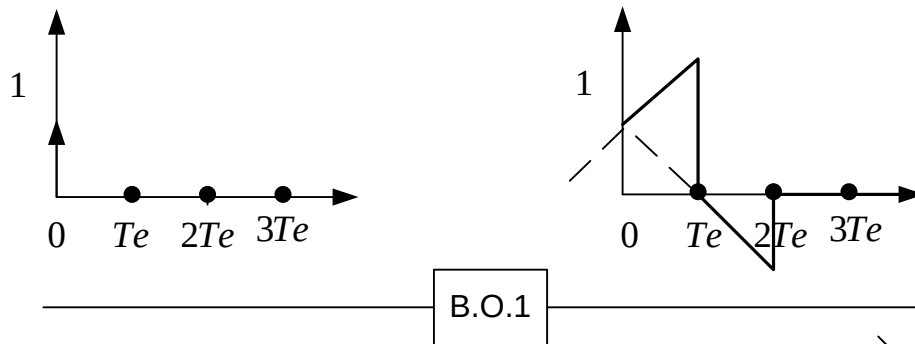
V.2. Bloqueur d'Ordre un (B.O.1.)

Appelé aussi extrapolateur. On réalise une extrapolation linéaire de la variation du signal entre deux instants d'échantillonnage à partir de la variation entre les deux instants d'échantillonnage précédents :

ISO9001- 2015

Autorisation N° : 06-2001

La réponse impulsionnelle du B.O.1 est donnée par:



Exemple d'une entrée quelconque d'un bloqueur d'ordre 1 :

